

2019-2020 学年湖北省恩施州巴东县九年级（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. （3 分）一元二次方程 $x^2 - 1 = 1$ 的常数项是（ ）

- A. -1 B. 1 C. 0 D. -2

【解答】解：∵ $x^2 - 1 = 1$,

$$\therefore x^2 - 2 = 0,$$

∴ 一元二次方程 $x^2 - 1 = 1$ 的常数项是 -2.

故选：D.

2. （3 分）二次函数 $y = -2x^2$ 的图象开口方向是（ ）

- A. 向下 B. 向左 C. 向上 D. 向右

【解答】解：∵ 二次函数 $y = -2x^2$ 的 $a = -2 < 0$,

∴ 开口向下，

故选：A.

3. （3 分）下列图形是中心对称图形的有（ ）个

①正方形；②矩形；③等边三角形；④线段；⑤角；⑥平行四边形

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【解答】解：①正方形；②矩形；④线段；⑥平行四边形是中心对称图形，共 4 个；

故选：B.

4. （3 分）方程 $x^3 = x$ 的解是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 0 或 1 D. 0 或 1 或 -1

【解答】解： $x^3 = x$,

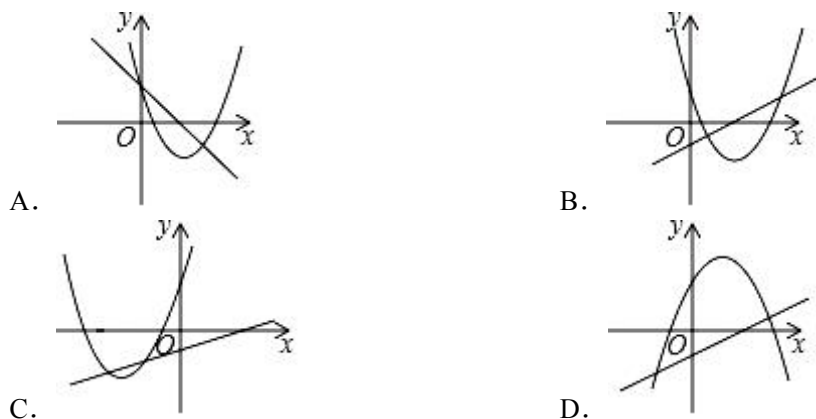
$$x^3 - x = 0,$$

$$x(x+1)(x-1) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1,$$

故选：D.

5. （3 分）如图，函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 和 $y = ax - a$ （ a 是常数，且 $a \neq 0$ ）在同一平面直角坐标系的图象可能是（ ）



【解答】解：A、由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得： $a<0$ ，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向下，故选项错误；

B、由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得： $a>0$ ，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向上，对称轴 $x=-\frac{-2}{2a}>0$ ，故选项正确；

C、由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得： $a>0$ ，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向上，对称轴 $x=-\frac{-2}{2a}>0$ ，和 x 轴的正半轴相交，故选项错误；

D、由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得： $a>0$ ，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向上，故选项错误。

故选：B.

6. (3分) 在函数 $y=2(2x-4)^2+1$ 中， y 随 x 的增大而增大，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x>4$ B. $x<4$ C. $x>2$ D. $x<2$

【解答】解： $\because y=2(2x-4)^2+1=8(x-2)^2+1$

$\therefore a=8>0$,

\therefore 二次函数图象开口向上，

又对称轴是直线 $x=2$,

\therefore 当 $x>2$ 时，函数图象在对称轴的右边， y 随 x 的增大而增大，

故选：C.

7. (3分) 已知点 $P(-a, 2)$ 与点 $Q(3, 2b)$ 关于原点对称，则 a 、 b 的值分别是 ()

- A. 3, -1 B. 1, -3 C. -1, -3 D. 3, 1

【解答】解： \because 点 $P(-a, 2)$ 与点 $Q(3, 2b)$ 关于原点对称，

$\therefore a=3, b=-1$,

故选：A.

8. (3分) 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (m+2)x + \frac{m}{4} = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 ,

x_2 . 若 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4m$, 则 m 的值是 ()

- A. 2 B. -1 C. 2 或 -1 D. 不存在

【解答】解: \because 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (m+2)x + \frac{m}{4} = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 ,

x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4m \cdot \frac{m}{4} > 0 \end{cases}$$

解得: $m > -1$ 且 $m \neq 0$.

$\because x_1, x_2$ 是方程 $mx^2 - (m+2)x + \frac{m}{4} = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4m,$$

$$\therefore \frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{1}{4}} = 4m,$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } -1,$$

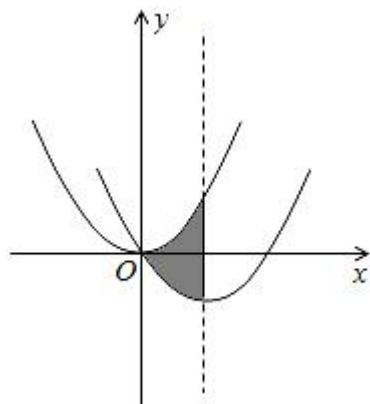
$$\therefore m > -1,$$

$$\therefore m = 2.$$

故选: A.

9. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 经过平移得到抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, 其

对称轴与两段抛物线所围成的阴影部分的面积为 ()



- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

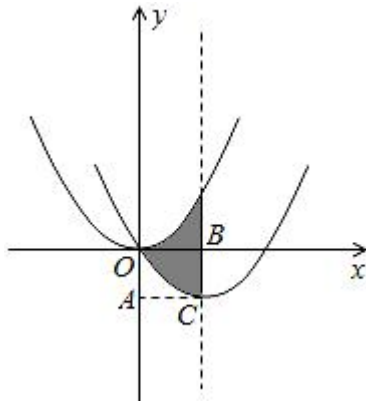
【解答】解: 过点 C 作 $CA \perp y$,

$$\because \text{抛物线 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}(x^2 - 4x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2,$$

\therefore 顶点坐标为 $C(2, -2)$,

对称轴与两段抛物线所围成的阴影部分的面积为: $2 \times 2 = 4$,

故选: B .



10. (3 分) 向阳村 2016 年的人均收入为 12000 元, 2018 年的人均收入为 14520 元, 则人均收入的年平均增长率为 ()

A. 10%或 - 210% B. 12.1% C. 11% D. 10%

【解答】 解: 设人均收入的年平均增长率为 x ,

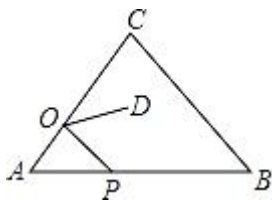
根据题意得: $12000(1+x)^2 = 14520$,

解得: $x = 0.1 = 10\%$ 或 $x = -2.1$ (不合题意, 舍去).

答: 人均收入的年平均增长率为 10%.

故选: D .

11. (3 分) 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AC = 9$, 点 O 在 AC 上, 且 $AO = 3$, P 是 AB 上一动点, 连接 OP , 将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 60° 得到线段 OD , 若使点 D 恰好落在 BC 上, 则线段 AP 的长是 ()



A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

【解答】 解: $\because \angle COP = \angle A + \angle APO = \angle POD + \angle COD$, $\angle A = \angle POD = 60^\circ$,

$\therefore \angle APO = \angle COD$.

在 $\triangle APO$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle APO = \angle COD, \\ OP = OD \end{cases}$$

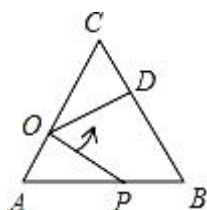
$\therefore \triangle APO \cong \triangle COD$ (AAS),

$\therefore AP = CO$,

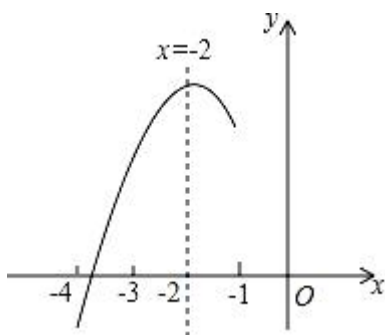
$\because CO = AC - AO = 6$,

$\therefore AP = 6$.

故选: C.



12. (3分) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -2$, 与 x 轴的一个交点在 $(-3, 0)$ 和 $(-4, 0)$ 之间, 其部分图象如图所示, 则下列结论: ① $3a - c < 0$; ② $abc < 0$; ③ 点 $(-\frac{9}{2}, y_1)$, $(-\frac{5}{2}, y_2)$, $(-\frac{1}{2}, y_3)$ 是该抛物线上的点, 则 $y_1 < y_2 < y_3$; ④ $4a - 2b \geq at^2 + bt$ (t 为实数); 正确的个数有 () 个



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解答】解: \because 对称轴为直线 $x = -2$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2,$$

$$\therefore b = 4a,$$

$$\therefore y = ax^2 + bx + c = ax^2 + 4ax + c;$$

① 当 $x = -1$ 时, $y > 0$,

$$\therefore a - 4a + c > 0,$$

$$\therefore c - 3a > 0,$$

$$\text{即 } 3a - c < 0,$$

故①正确；

②由图象可知： $a < 0$ ，

$$\therefore b < 0,$$

$\because x = -4$ 时， $y < 0$ ，由对称性可知， $x = 0$ 时， $y < 0$ ，

$$\therefore c < 0,$$

$$\therefore abc < 0,$$

故②正确；

③点 $(-\frac{9}{2}, y_1)$ ， $(-\frac{5}{2}, y_2)$ ， $(-\frac{1}{2}, y_3)$ 在抛物线上，

\because 对称轴为 $x = -2$ ，

$$\therefore |-\frac{9}{2} + 2| > |-\frac{1}{2} + 2| > |-\frac{5}{2} + 2|,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2,$$

故③错误；

④当 $x = -2$ 时，函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最大值，

$$\text{最大值为 } y = 4a - 2b + c,$$

$$\therefore 4a - 2b + c \geq at^2 + bt + c,$$

$$\therefore 4a - 2b \geq at^2 + bt;$$

故④正确；

故选：C.

二、填空题（每小题 3 分，共计 12 分）

13.（3 分）关于 x 的方程 $(x+n)^2 = p$ 有两个相等的实数根，则 p 的取值是 0.

【解答】解：由题意可知： $p = 0$ ，

故答案为：0.

14.（3 分）已知 $x + y = -8$ ，则 xy 的最大值是 16.

【解答】解： $\because x + y = -8$ ，

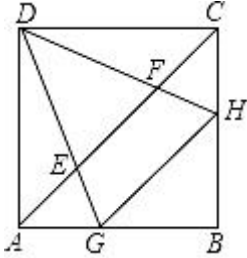
$$\therefore y = -x - 8,$$

$$\therefore xy = x(-x - 8) = -x^2 - 8x = -(x + 4)^2 + 16,$$

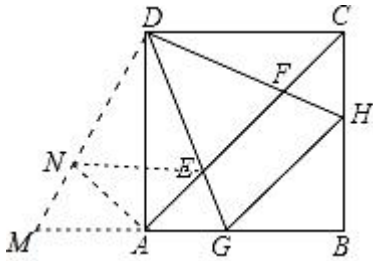
$\therefore xy$ 的最大值是 16，

故答案为 16.

15. (3分) 在正方形 $ABCD$ 中, 点 G 在 AB 上, 点 H 在 BC 上, 且 $\angle GDH=45^\circ$, DG 、 DH 分别与对角线 AC 交于点 E 、 F , 则线段 AE 、 EF 、 FC 之间的数量关系为 $EF^2 = AE^2 + CF^2$.



【解答】解: 如图, 将 $\triangle DCH$ 绕点 D 顺时针旋转 90° , 得 $\triangle DAM$, 则 $\triangle DAM \cong \triangle DCH$
 则 $DM = DH$, $AM = CH$, $\angle CDH = \angle ADM$



在 DM 上截取 $DN = DF$, 连接 NE , AN

在 $\triangle DAN$ 和 $\triangle DCF$ 中

$$\begin{cases} DA = DC \\ \angle ADN = \angle CDF \\ DN = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAN \cong \triangle DCF$ (SAS)

$\therefore AN = CF$, $\angle DAN = \angle DCF = 45^\circ$

又 $\because \angle DAC = 45^\circ$

$\therefore \angle NAE = 90^\circ$

$\therefore AN^2 + AE^2 = NE^2$

$\because \angle GDH = 45^\circ$,

$\therefore \angle NDE = 45^\circ$

在 $\triangle DNE$ 和 $\triangle DFE$ 中

$$\begin{cases} DN = DF \\ \angle NDE = \angle FDE \\ DE = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle DNE \cong \triangle DFE$

$$\therefore NE=EF$$

$$\text{又} \because AN=CF$$

$$\therefore CF^2+AE^2=EF^2$$

故答案为： $EF^2=AE^2+CF^2$.

16. (3分) 实数 x, y 满足 $(x+y)^2+x+y-2=0$, 则 $2x+2y$ 值为 -4 或 2 .

【解答】解：设 $t=x+y$, 则原方程转化为 $t^2+t-2=0$,

$$\text{所以 } (t+2)(t-1)=0.$$

$$\text{所以 } t=-2 \text{ 或 } t=1.$$

$$\text{所以 } 2x+2y=2t.$$

$$\text{所以 } 2x+2y=-4 \text{ 或 } 2x+2y=2.$$

故答案是： -4 或 2.

三、解答题 (共 72 分)

17. (8分) (1) 用公式法解方程： $3x^2+6x=4$.

(2) 两个相邻偶数的积是 168, 求这两个偶数的和.

【解答】(1) 解：原方程可变形为 $3x^2+6x-4=0$,

$$\text{解得： } x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3},$$

$$\therefore x_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{3}, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{3}.$$

(2) 解：设较小的偶数为 x , 则另一个偶数为 $(x+2)$,

$$\text{依题意，得： } x(x+2)=168,$$

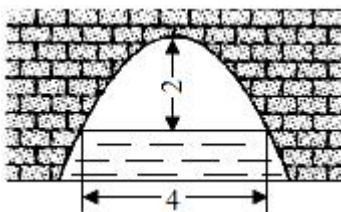
$$\text{解得： } x_1=12, x_2=-14,$$

$$\therefore x+2=14 \text{ 或 } -12,$$

$$\therefore x+(x+2)=\pm 26.$$

答：这两个偶数的和为 ± 26 .

18. (8分) 如图，一抛物线型拱桥，当拱顶到水面的距离为 2 米时，水面宽度为 4 米；那么当水位下降 1 米后，水面的宽度为多少米？



【解答】解：设抛物线解析式为 $y=ax^2$,

把 (2, -2) 代入得: $-2=4a$,

解得: $a=-\frac{1}{2}$,

\therefore 抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2$,

把 $y=-3$ 代入得: $x=\pm\sqrt{6}$,

则水面的宽度是 $2\sqrt{6}$ 米.

19. (8 分) (1) 用配方法解方程: $2x^2+1=3x$.

(2) 已知: $a^2+6ab-40b^2=0$ ($a\neq 0$), 求 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ 的值.

【解答】解: (1) $\because 2x^2+1=3x$,

$$\therefore 2x^2-3x=-1,$$

$$\therefore x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore (x-\frac{3}{4})^2=\frac{1}{16},$$

$$\therefore x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$

$$\therefore x_1=1, x_2=\frac{1}{2},$$

(2) 方程 $a^2+6ab-40b^2=0$ 变形得:

$$(a+3b)^2=49b^2$$

$$\therefore a=4b\neq 0, \text{ 或 } a=-10b\neq 0,$$

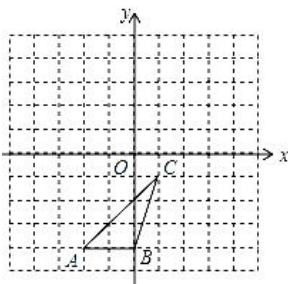
$$\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{17}{4} \text{ 或 } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-\frac{101}{10}$$

20. (8 分) 如图, $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, -4)$, $B(0, -4)$, $C(1, -1)$.

(1) 画出 $\triangle ABC$ 关于点 O 的中心对称图形 $\triangle A_1B_1C_1$.

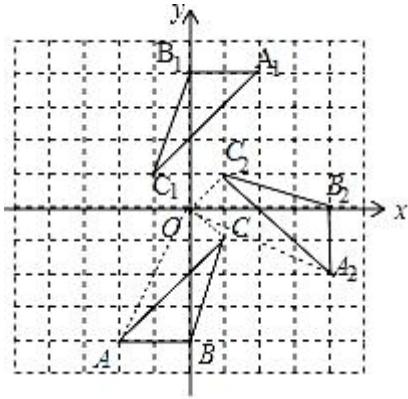
(2) 画出 $\triangle ABC$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 的 $\triangle A_2B_2C_2$, 直接写出点 C_2 的坐标为 (1, 1).

(3) 若 $\triangle ABC$ 内一点 $P(m, n)$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 的对应点为 Q , 则 Q 的坐标为 $(-n, m)$. (用含 m, n 的式子表示)



【解答】解：（1）如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 为所作；

（2）如图， $\triangle A_2B_2C_2$ 为所作；点 C_2 的坐标为 $(1, 1)$ ；



（3）若 $\triangle ABC$ 内一点 $P(m, n)$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 的对应点为 Q ，则 Q 的坐标为 $(-n, m)$ 。

故答案为 $(-n, m)$ 。

故答案为 $(1, 1), (-n, m)$ 。

21. （8分）已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2)=m^2$

（1）求证：对于任意实数 m ，方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程的一个根是 1，求 m 的值及方程的另一个根。

【解答】解：（1） \because 关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2)=m^2$ ，

$$\therefore x^2 - 5x + 6 - m^2 = 0,$$

$$\therefore \Delta = 25 - 4(6 - m^2) = 1 + 4m^2 > 0,$$

\therefore 对于任意实数 m ，方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程的一个根是 1，

$$\text{则 } (1-3) \times (1-2) = m^2,$$

$$2 = m^2,$$

$$m = \pm\sqrt{2},$$

$$\text{原方程变形为 } x^2 - 5x + 4 = 0,$$

设方程的另一个根为 a ，

$$\text{则 } 1 \times a = 4,$$

$$a = 4,$$

则方程的另一个根为 4。

22. (10 分) 七年级上学期, 我们探究了“设计制作长方体形状的包装纸盒”, 今天我们继续运用所学知识, 解决“设计制作长方体形状的包装纸盒”中常见的问题.

如图 1 是一块边长为 60cm 的正方形薄铁片, 现在用它来制作成如图 2 的一个长方体盒子.

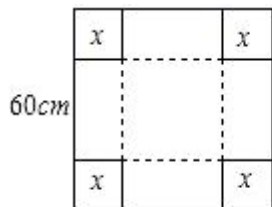


图1

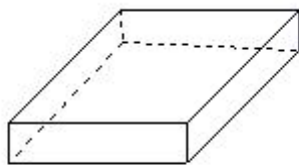


图2



备图2

(1) 如果要做成一个没有盖的长方体盒子, 可先在薄铁片的四个角上截去四个相同的小正方形, 边长为 $x\text{cm}$, 然后把四边折合起来.

①求做成的盒子底面积 $y\text{cm}^2$ 与截去小正方形边长 $x\text{cm}$ 之间的函数关系式;

②当做成的盒子的底面积为 900cm^2 时, 试求该盒子的容积.

(2) 如果要做成一个有盖的长方体盒子, 其制作方案要求同时符合下列两个条件:

①必须在薄铁片的四个角上各截去一个四边形 (其余部分不能裁截);

②折合后薄铁片既无空隙、又不重叠地围成各盒面, 请你画出符合上述制作方案的一种草案 (不必说明画法与根据), 并求当底面积为 800cm^2 时, 该盒子的高.

【解答】解: (1) ①由题意可得,

$$y = (60 - 2x)(60 - 2x) = 4x^2 - 240x + 3600,$$

即做成的盒子底面积 $y\text{cm}^2$ 与截去小正方形边长 $x\text{cm}$ 之间的函数关系式是 $y = 4x^2 - 240x + 3600$;

②令 $4x^2 - 240x + 3600 = 900$,

解得, $x_1 = 15$, $x_2 = 45$,

$\because 45 + 45 > 60$,

\therefore 当 $x = 45$ 时不符合题意,

\therefore 盒子的容积是: $900 \times 15 = 13500\text{cm}^3$,

答: 当做成的盒子的底面积为 900cm^2 时, 该盒子的容积是 13500cm^3 ;

(2) 截去的四边形是左上角和右上角的两个小四边形和四边形 $ABCD$ 、四边形 $EFGH$, 如右图所示,

设盒子的高为 $h\text{cm}$,

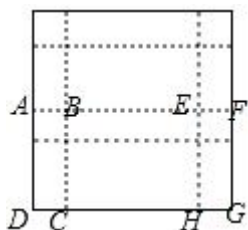
$$(60 - 2h) \left[(60 - 2h) \times \frac{1}{2} \right] = 800,$$

解得, $h_1=10$, $h_2=50$,

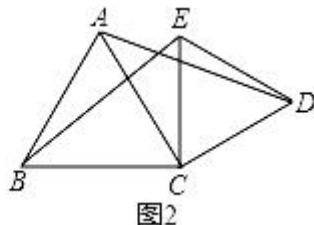
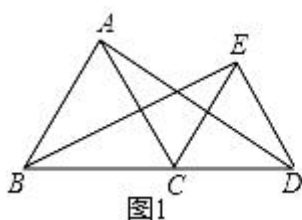
\because 当 $h=50$ 时, $60-2h<0$ 不合题意,

$\therefore h=10$,

即当底面积为 800cm^2 时, 该盒子的高是 10cm .



23. (10 分) 如图, 点 C 为线段 BD 上的一点, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形.



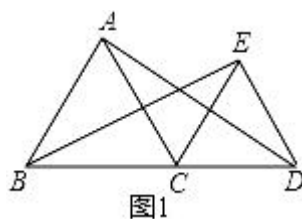
(1) 求证: $AD=BE$.

(2) 以点 C 为中心, 将 $\triangle CDE$ 逆时针方向旋转, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$).

① 当 α 为多少时, $DE \parallel AB$? 直接写出结果, 不要求证明.

② 当 $BC=6$, $CD=4$ 时, 设点 E 到直线 AB 的距离为 y , 当 α 为多少时, 点 E 到直线 AB 的距离最小? 求出最小值, 并简洁说明理由.

【解答】 (1) 证明: 如图 1 中,



$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore CB=CA$, $CE=CD$, $\angle BCA=\angle ECD=60^\circ$,

$\therefore \angle BCE=\angle ACD$,

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$ (SAS),

$\therefore AD=BE$.

(2) 解: ① 当 α 为 120° 或 300° 时, $DE \parallel AB$.

②如图 2 中,

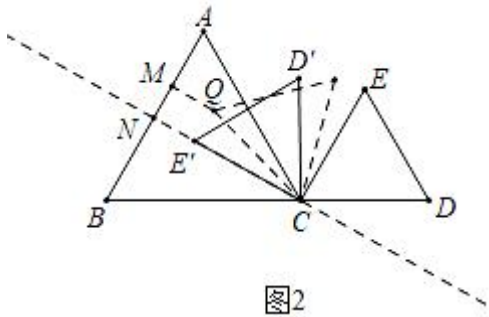


图2

当 $a=90^\circ$ 时, 点 E 旋转至点 E' , 此时点 E' 到 AB 的距离最短, $y=NE'=3\sqrt{3}-4$.

如图, 根据三角形三边关系和垂线段最短可证, $CE'+NE' \leq QM+CQ$,

当点 Q 与点 E' 重合时取等号.

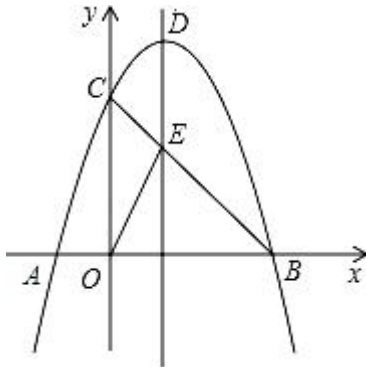
即: $NE' \leq QM$.

24. (12 分) 如图, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 连接 BC 交抛物线的对称轴于点 E , D 是抛物线的顶点.

(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 若点 P 在第一象限内的抛物线上, 且 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle OEB}$, 求点 P 的横坐标.

(3) 将 $\triangle OBE$ 以点 B 为中心顺时针旋转, 旋转角等于 $2\angle OBC$, 设点 E 的对应点为点 E' , 点 O 的对应点为点 O' , 求直线 $O'E'$ 与抛物线的交点坐标.



【解答】 解: (1) 抛物线的表达式为: $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3 \cdots \textcircled{1}$;

(2) 抛物线的对称轴为: $x=1$, 故点 $D(1, 4)$,

直线 BC 的表达式为: $y = -x + 3$, 当 $x=1$ 时, $y=2$,

故点 $E(1, 2)$,

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times AB \times y_P = S_{\triangle OEB} = \frac{1}{2} \times OB \times y_E,$$

$$\text{即 } 4 \times y_P = 3 \times 2, \quad y_P = \frac{3}{2},$$

将点 P 的纵坐标代入抛物线表达式得: $\frac{3}{2} = -x^2 + 2x + 3$,

解得: $x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ (负值已舍去);

(3) 将 $\triangle OBE$ 以点 B 为中心顺时针旋转, 旋转角等于 $2\angle OBC$, 相当于旋转了 90° ,

故点 O' $(3, 3)$;

将线段 BE 向左平移 3 个单位, 此时点 E 的坐标为: $(-2, 2)$, 以点 B 为中心顺时针旋转 90° ,

此时点 E 的坐标为: $(2, 2)$, 再将线段 BE 向右平移 3 个单位得到点 E' $(5, 2)$,

同理可得: 直线 $O'E'$ 的表达式为: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \cdots \textcircled{2}$,

联立 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 并解得: $x = 1$ 或 $\frac{3}{2}$,

故直线 $O'E'$ 与抛物线的交点坐标为: $(1, 4)$, $(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$.